数理解析研究所講究録
624巻 1987年 75-82

Untangling theorem

九大理学部　竹内　義浩
(Yoshihiro Takeuchi)

__定義__　Tangle とは 3-ball B と，B 内の proper arcs t_1, t_2 の組 (B, t_1, t_2) のことである．

__定義__　2つの tangle (B, t_1, t_2) と (B', t_1', t_2') が同値とは，位相同型写像 $h: B \to B'$ が存在して，$h(t_i) = t_i'$ $(i=1,2)$ となっている時をいう．

__定義__　$(D^2 \times I, \{p_1, p_2\} \times I)$ と同値な tangle を trivial tangle という．但し，D^2 は 2-disc，p_1, p_2 は $\mathrm{Int}\, D^2$ の異なる2点．

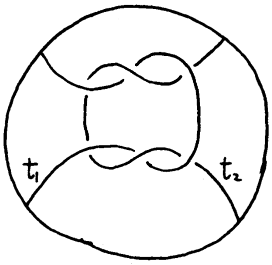
Tangle が trivial になる為の必要十分条件を次の定理が与える．

__定理__　(B, t_1, t_2) が trivial tangle である為の必要十分条件は次の3つが成り立つことである．

$$
\begin{cases}
\pi_1(B-(t_1\cup t_2)) \cong \mathbb{Z}*\mathbb{Z} & \cdots ① \\
\pi_1(B-t_1) \cong \mathbb{Z} & \cdots ② \\
\pi_1(B-t_2) \cong \mathbb{Z} & \cdots ③
\end{cases}
$$

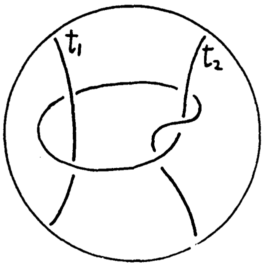
注意　①②③ は Best possible である．即ち，

1)　②③ は成り立つが trivial でない tangle が存在する．



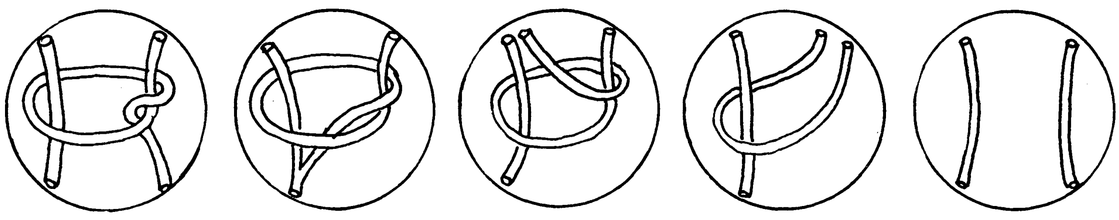
左図の tangle が ②③ を満たすことは明らかであり，trivial tangle でないのは，trivial tangle を connected sum することによって Square knot が得られることによる．

2)

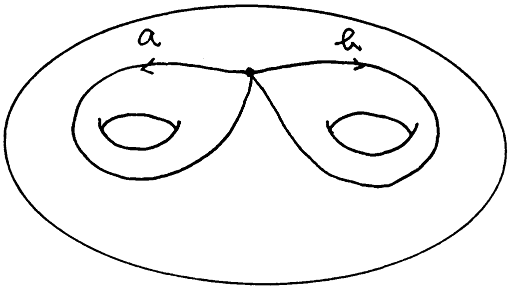


①② は成り立つが trivial でない tangle が存在する．

左図の tangle が ② を満たすことは明らか．trivial でないことは t_2 が trivial arc でないことから明らか．① が成り立つことは $B-\mathring{N}(t_1\cup t_2)$ が下図のように変形できることから明らか．



V を genus 2 の solid torus とし，a, b を ∂V 上に標準的にとった $\pi_1(V)$ の generators とする．（下図）



この時，次の2つの Lemma が成り立つが，証明は省く．

Lemma 1. C を ∂V の simple closed curve とし $[C]=[a]$ in $\pi_1(V)$ とすると，V から V への位相同型写像 h と，V の meridian disc system M_1, M_2 がとれて，$h(C)$ と M_1 は transversal に1点で交わる．

Lemma 2. C を ∂V の simple closed curve とし $[C]=[a]^{\pm1}[b]^n$ in $\pi_1(V)$ かつ，C と b は交わらないとすると，V から V への位相同型写像 h と，V の meridian disc system M_1, M_2 がとれて，

(1) $h(C)$ と M_1 は transversal に1点で交わる．

(2) b と M_1 は交わらない．

(3) b と M_2 は transversal に1点で交わる．

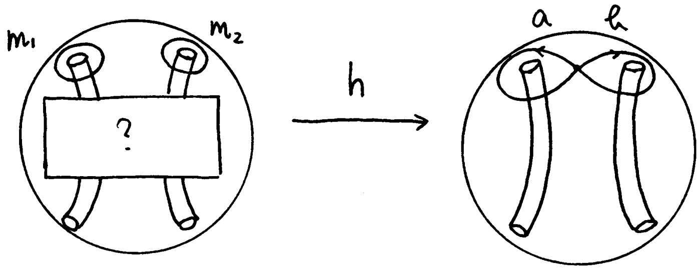
この2つの Lemma を仮定して定理の証明を行う．

定理の証明

①より 3-manifold の標準的議論により,

$$^{\exists}h : B - \mathring{N}(t_1 \cup t_2) \underset{\text{homeo.}}{\cong} V \quad ; \text{ genus 2 solid torus}$$

([1] Th. 7.1 の証明参照)



注意　$h(m_1)$, $h(m_2)$ が上図右のような a, b に ∂V 上で各々 freely homotopic であれば，この h を $N(t_1 \cup t_2)$ に自然に拡張することによって tangle を trivial にする同型写像が得られるが，$h(m_1)$, $h(m_2)$ がどのようになっているかは一般には，わからない。以下，$h(V)$ を更に homeo. で変形して m_1, m_2 のうつり先が，∂V 上の標準的 longitude になるようにできることを示す。

②より

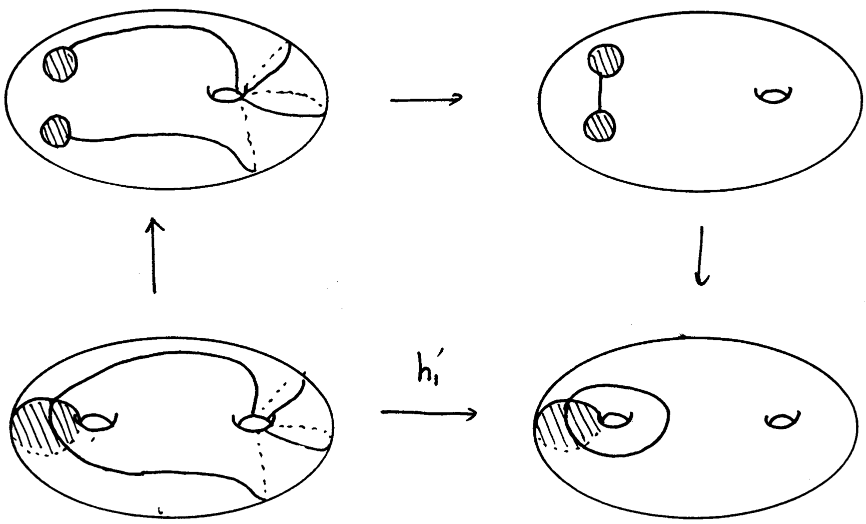
$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(B - \mathring{N}(t_1)) \cong \pi_1(B - \mathring{N}(t_1 \cup t_2)) \big/ [m_2] = 1$$
$$\cong h_*(\pi_1(B - \mathring{N}(t_1 \cup t_2))) \big/ [h(m_2)] = 1$$

ここで $\mathbb{Z}$ は free 群, $h_*(\pi_1(B - \mathring{N}(t_1 \cup t_2))) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ も free 群であるから combinatorial group theory の一般論から $[h(m_2)]$ は $h_*(\pi_1(B - \mathring{N}(t_1 \cup t_2))) = \langle a, b \rangle$ のある generating system の元となる.

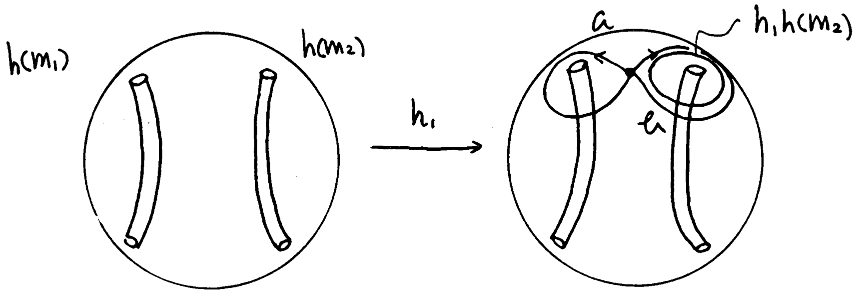
（[4]，5.10 参照.）

よって群 $\langle a, l \rangle$ の generating system の Automorphism φ が存在して $\varphi(l) = [h(m_2)]$ となる．Zieschang の結果（[6]，Th 1 参照）により，「$\exists h_1 : V \xrightarrow[\text{homeo.}]{} V$ s.t. $h_1(h(m_2))$ は V の中で l に freely homotopic」が成り立つ．

Lemma 1. により存在が保証されている disc で V を cut し，disc をすべらせて再び貼り合わせることにより，V から V への homeo. h_1' で $h_1' h_1(m_2)$ は ∂V で l に freely homotopic になるものがつくれる．（下図参照.）



このようにして得られた $h_1' \circ h_1$ を改めて h_1 とおくと，$h_1(h(m_2))$ は標準的な longitude と ∂V において freely homotopic となる．



③ より $\mathbb{Z} \cong \pi_1(B-\mathring{N}(t_2)) \cong \pi_1(B-\mathring{N}(t_1 \cup t_2)) / [m_1]=1$

$$\cong (h_1 h)_*(\pi_1(B-\mathring{N}(t_1\cup t_2))) / [h_1h(m_1)]=1$$

再び，前と同様の理由で $[h_1h(m_1)]$ は上図のようにとった a, b に関して群 $\langle a, b\rangle$ のある generating system の元となる．このとき T. Kaneto により $[h_1h(m_1)]$ は cyclic permutation と inversion を無視して，次の I) or II) の形に書ける．([2] 参照)

I) $ab^{\varepsilon_1}\cdot\cdots\cdot ab^{\varepsilon_k}$

II) $a^{\varepsilon_1}b\cdot\cdots\cdot a^{\varepsilon_k}b$

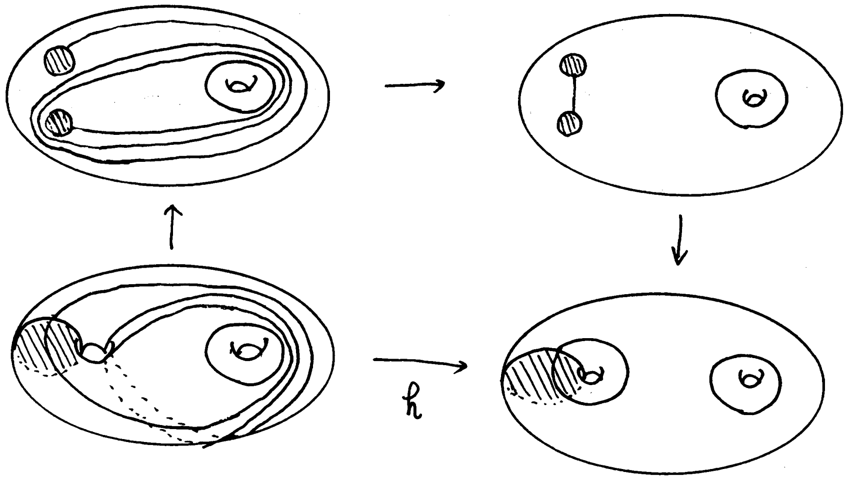
但し，$\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$，$|\varepsilon_i-\varepsilon_j|\leq 1$，$1\leq {}^\forall i, {}^\forall j \leq k$.

一方，② より $\langle [m_1]\rangle = \pi_1(B-\mathring{N}(t_1)) \cong \pi_1(B-\mathring{N}(t_1\cup t_2))/[m_2]=1$

$$\therefore \langle [h_1h(m_1)]\rangle = (h_1h)_*(\pi_1(B-\mathring{N}(t_1))) \cong (h_1h)_*(\pi_1(B-\mathring{N}(t_1\cup t_2)))/[h_1h(m_2)]=1$$

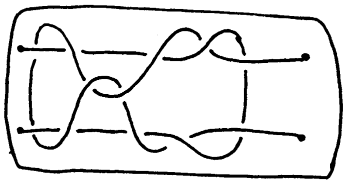
ここで，$(h_1h)_*(\pi_1(B-\mathring{N}(t_1\cup t_2))) = \langle a, b\rangle$，$[h_1h(m_2)] = b$ であるから $[h_1h(m_1)]$ という a, b の word において $b=1$ とおくと $a^{\pm1}$ になる．I) II) の形のものでそのようなものは $a^{\pm1}b^m$ の形に限る． よって，$h_1h(m_1)$ は $a^{\pm1}b^m$ に V の中で freely homotopic. Lemma 2. により存在が保証されている disc を利用して前と同様の

構成を行うことによって V から V への homeo. h_2 で，$h_2(h_1h(m_1))$ は ∂V において a に freely homotopic，$h_2(h_1h(m_2))$ は ∂V において b に freely homotopic になるようなものがつくれる．(下図参照)



$h_2 \circ h_1 \circ h$ が所望の homeo. となる．　　　　　(証明終)

応用　阪市大の河内先生が 1986.5月の数理研での短期共同研究集会「Aspherical manifolds の幾何学」において提出された問題：

π_1  $\not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ を示せ．

に答えることができる．

(解) 上図の tangle は trivial tangle を connected sum することによって，Kinoshita-Terasaka knot になるが，Kinoshita-Terasaka knot の bridge index は 3 であるから，この tangle は trivial でない．よって定理より π_1 は $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ でない．

この問題は既に九大の金信氏が Zeeman の方法で解いており，より簡単な解決方法として金信氏が問題提起されたことが定理の発端となった．

参考文献

[1] J. Hempel (1976), 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86.

[2] T. Kaneto (1979), S^3の種数2のHeegaard diagramsに対応する基本群の表示について，京大数理研講究録 369.

[3] W. Magnass, A. Karass, D. Solitar (1966), Combinatorial group theory, Dover Publications.

[4] R.C. Lyndon, P.E. Schupp (1977), Combinatorial group theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York.

[5] E.C. Zeeman (1960), Linking spheres, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24, 149-153

[6] H. Zieschang (1970), On simple systems of paths on complete pretzels, Amer. Math. Soc. Transl. (2) vol. 92, 127-137